Schulstunde

Trigonometrie in nicht rechtwinkligen Dreiecken

ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 16024

Stand . April 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

www.mathe-cd.de

Willkommen zur Trigonometrie in nicht rechtwinkligen Dreiecken

Ich habe mir für diese Stunde ein umfangreiches Thema vorgenommen. Es könnte also auch eine Doppelstunde werden. Für unsere Unterhaltung im Frage- Antwort-System habe ich den Text in 27 meistens kleine Abschnitte eingeteilt. Dann kann ich dir auch eine kleine Aufgabe stellen, ohne dass du schon meine Antwort siehst, weil sie im nächsten Abschnitt steht.

Dieser Stoff erfordert von dir ein aktives mitarbeiten. Das heißt, du solltest alle Lösungen schriftlich machen und du benötigst einen Taschenrechner.

Was du fermer wissen solltest: Hier wird **Methodenwissen** gefragt sein. Die Berechnung beliebiger Dreiecke ist vielseitig. das heißt es gibt mehrere Ansätze. Und du musst hier wirklich lernen, wie man aus den gegebenen Elementen auf die benötige Formel kommt. Ohne dieses WISSEN gehst du einfach baden.

Was hilft dir ein Taschenrechner, wenn du die Methodik nicht beherrscht.

Tu dir bitte einen gefallen, und arbeite in unserer Schulstunde intensiv mit, damit auch das, was ich dir zeigen und vermitteln will, in deinem Kopf so viele Spuren hinterlässt, dass du dich später daran erinnern kannst, welche Methode in welchem Fall zur Lösung führt.

Schüler, die hier nur oberflächlich darüber schauen und weiterblättern, sollten eher einen Spaziergang machen. Das nützt genau so viel

Hinweis: Es gibt noch folgende Texte zu diesem Thema:

16017 Keine Ahnung von Sinussatz und Kosinussatz 1 (Grundlagen)

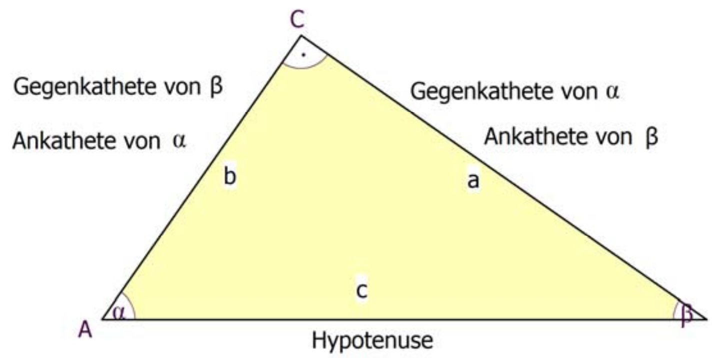
16050 Keine Ahnung von Sinussatz und Kosinussatz 2 (Methodenliste)

Und nun fangen wir an!

Du willst doch lernen,
wie man Dreiecke berechnen kann.

☺

$\boxed{1}$ Du hast gelernt, dass man <u>in rechtwinkligen Dreiecken</u> mit **Sinus, Kosinus und Tangens** rechnen kann. Das ist für Anfänger gewöhnungsbedürftig. Diese Begriffe sind Seitenverhältnisse, die seltsamerweise nur von den Winkeln abhängig sind und sind nicht ändern, wenn man die Dreiecke aufbläst (streckt, staucht). Damit klar ist, wovon wir reden, brauchen wir ein Beispiel!



Man hat definiert:

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

z. B.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

Erinnerst du dich?

Nun berechne bitte mit einem Taschenrechner aus den Größen

$c = 8$ cm und $a = 4{,}5$ cm die Winkel α und β sowie die Seite b.

Meine Vergleichslösung steht im Abschnitt $\Rightarrow$ $\boxed{2}$

$\boxed{15}$ Berechnung eines Winkels aus drei gegebenen Seiten

Das Dreieck hat die Seiten $\boxed{a = 7\text{ cm},\ \ b = 4\text{cm}\ \text{ und } c = 6\text{cm}}$

Da α gesucht ist, benötigen wir diese Form des Kosinussatzes: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$

Umstellen: $2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

Taschenrechner-Aktion: $\alpha \approx 86{,}4^{\circ}$

$$\cos^{-1}\frac{16+36-49}{48}$$
86.4166783

Berechne nun den Winkel β $\Rightarrow$ $\boxed{16}$ auf Seite 4

$\boxed{2}$ Gegeben sind also $c = 8$ cm und $a = 4{,}5$ cm sowie $\gamma = 90^0$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4{,}5}{8}$ folgt $\alpha \approx 34{,}2^O$

```
sin⁻¹ 4.5/8
        34.228
```

Für β verwendet man die Winkelsumme.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^O \Rightarrow \alpha + \beta = 90^O \Rightarrow \beta \approx 90^o - 34{,}2^O = 55{,}8^O$$

b kann man etwa mit dem Kosinus von α berechnen:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 8\text{ cm} \cdot \cos 34{,}2^O \approx 6{,}6\text{ cm}$$

```
8×cos 34.2
         6.616
```

Diese Methoden setzen aber voraus, dass ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt.
Wir vertiefen das jetzt nicht weiter, denn ich will dir zeigen, was man tut, wenn das Dreieck keinen rechten Winkel hat.

Es gibt dann zwei Ersatzlösungen, genannt **SINUSSATZ** und **KOSINUSSATZ**

Im Abschnitt $\boxed{3}$ erkläre ich dir den Sinussatz.

$\boxed{16}$ Das Dreieck hat die Seiten $\boxed{a = 7\text{ cm},\ b = 4\text{cm} \text{ und } c = 6\text{cm}}$

Da β gesucht ist, benötigen wir diese Form des Kosinussatzes: $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

Umstellen: $2ac \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} \Rightarrow \boxed{\beta = \cos^{-1}\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

Taschenrechner-Aktion: $\alpha \approx 34{,}8^O$

```
cos⁻¹ (49+36−16)/84
        34.77194403
```

Diese Lösung ist umständlich:
Wenn man alle Seiten und einen Winkel kennt, lässt sich der Sinussatz anwenden, weil man dann ein Paar (Winkel / Gegenseite) kennt.

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\frac{b \cdot \sin\alpha}{a}}$$

```
sin⁻¹ (4×sin 86.4)/7
        34.77121721
```

Taschenrechner-Aktion: $\alpha \approx 34{,}8^O$. Die Abweichung ab der 4. Dezimalen hat ihren Grund darin, dass ich für α einen gerundeten wert verwendet habe. Will man das vermeiden muss man β direkt zusammen mit α berechnen:

```
cos⁻¹ (16+36−49)/48
         86.4166783
sin⁻¹ (4×sin Ans)/7
        34.77194403
```

Nun verschaffen wir uns Übersicht $\Rightarrow$ $\boxed{17}$